Devoir d'analyse - Séries & Séries entières - Module M6

Durée : 1h.
Documents non autorisés. Machine à calculer non programmable(de type « collège ») autorisée.

Toutes les réponses seront justifiées.

Rappel des équivalents en 0

$\sin(x) \underset{0}{\sim} x$; $1-\cos(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$; $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$

$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$; $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$; $\left((1+x)^\alpha - 1\right) \underset{0}{\sim} \alpha\, x$

Rappel des séries entières classiques

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots$$

Rappel des formules classiques de trigonométrie

cos(a + b) = cos(a) cos (b) – sin(a) sin(b)
cos(a – b) = cos(a) cos (b) + sin(a) sin(b)
sin(a + b) = sin(a) cos (b) + cos(a) sin(b)
sin(a – b) = sin(a) cos (b) – cos(a) sin(b)

cos(2a) = [cos(a)]² - [sin(a)]²
cos(2a) = 1 – 2 [sin(a)]²
cos(2a) = 2 [cos(a)]² - 1
sin(2a) = 2 sin(a) cos(a)

Exercices

Exercice 1 **(sur 6 points)**

Donner la nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants :

(1) $u_n = \dfrac{5^n+3}{5^n-1}$; *(2)* $u_n = \dfrac{n-5}{\sqrt{(n^5+n^2+2)}}$; *(3)* $u_n = \cos\left(n \times \dfrac{\pi}{3}\right) \times \dfrac{1}{n^2}$

Exercice 2 **(sur 3 points)**

Montrer que la série suivante est convergente et en calculer la somme : $u_n = \dfrac{n}{(n+1)!}$

(*Indication pour le calcul de la somme : on pourra montrer que* $\dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$)

Exercice 3 **(sur 6 points)**

Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières : *(1)* $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)!}$; *(2)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \times x^n$

Exercice 4 **(sur 5 points)**

Résoudre sur ℝ l'équation différentielle suivante à l'aide des séries entières : $\begin{cases} y' - (1+x)y = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

Le barème est donné à titre indicatif